Lycée Lakanal | PCSI A&B – Semestre 1
Mathématiques | août 2024

TD0 - Révisions

- ❏ Les mathématiques en PCSI occupent une place prépondérante (10 heures par semaine : 7h (cours) +3h (TD)) : il est par conséquent indispensable d'avoir une solide maîtrise des connaissances de Première et Terminale pour bien commencer l'année. Par ailleurs, vous devez savoir que la calculatrice est interdite aux épreuves de mathématiques au concours, elle sera donc **interdite** aux devoirs surveillés en mathématiques pendant les deux années de classes préparatoires.
- ❏ Il est nécessaire de maîtriser, pour le début de l'année, les points suivants du programme de mathématiques de Première et Terminale :
  - manipulation des nombres complexes (si vous avez suivi l'option Maths Expertes)
  - résolution des équations du second degré,
  - les fonctions usuelles (puissances, logarithme, exponentielle et trigonométriques), et leurs propriétés,
  - les limites et règles de calcul sur les limites : en particulier les limites classiques doivent être connues,
  - les propriétés liées à la continuité, théorème des valeurs intermédiaires,
  - la dérivation : dérivée des fonctions usuelles, application à l'étude de fonctions,
  - le calcul intégral : propriétés de l'intégrale, calcul de primitives usuelles, calcul d'intégrales,
  - manipulation des inégalités : distinction entre $<$ et $\leqslant$, règles de calcul sur les inégalités,
  - connaître parfaitement les formules trigonométriques $\cos(a+b)$, $\sin(a+b)$ (il n'y a pas de formulaire en classe préparatoire),
  - la rédaction des raisonnements par récurrence,
- ❏ Tous les points précédents seront revus à différentes périodes de l'année (pas nécessairement au début) mais les principales connaissances de Terminale suffiront, au début, pour traiter les questions s'y rapportant dans le cours ou les problèmes.
- ❏ **Aucun manuel n'est requis pour le cours de mathématiques.**

Voici un panel d'exercices à chercher avant la rentrée pour vous aider à vous améliorer dans la pratique des calculs. Les notions abordées sont censées être maîtrisées en classe de terminale.

Vous trouverez au début une liste de formules de trigonométrie **à apprendre**.

Une évaluation de calcul sur les points abordés dans ce document est prévue les premiers jours de la rentrée.

Les formules suivantes (trigonométrie et dérivation) sont à connaître parfaitement.

0.1. Formules de dérivation.

Proposition 0.1. *Soit f, g deux fonctions réelles, définies et dérivables sur l' intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$. Soit λ une constante réelle. On a alors, pour tout $x \in I$,*

Somme		$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
Différence		$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
Multiplication par une constante		$(\lambda f)'(x) = \lambda\, f'(x)$
Produit		$(f\,g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Inverse	si g ne s'annule pas sur I	$\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x) = \dfrac{-g'(x)}{g(x)^2}$
Quotient	si g ne s'annule pas sur I	$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
Composition	si $g(I) \subset I$	$(f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x))$

Dérivées usuelles. Soient a, b des constantes réelles, n un entier naturel.

$f(x)$	$f'(x)$	domaine de dérivabilité
$ax + b$	a	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

0.2. **Formules de trigonométrie.**

Définition 0.2. À partir des fonctions sin et cos, on définit la fonction tangente sur l'ensemble $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, notée tan, par

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Propriété 0.3. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$. De plus,*

Parité, imparité	pour tout $x \in \mathbb{R}$, si de plus $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$	$\cos(-x) = \cos(x)$ $\sin(-x) = -\sin x$ $\tan(-x) = -\tan(x)$
Somme	pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ si de plus $x, y, x+y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$ $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

Corollaire 0.4. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$*

$$\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2$$
$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$
$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan(x)^2}, \qquad \text{si } x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(x)^2 = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$
$$\sin(x)^2 = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$
$$\tan(x)^2 = \frac{1 - \cos(2x)}{1 + \cos(2x)}, \qquad \text{si } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

si $x \neq \pi + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$,

$$\cos(x) = \frac{1 - \tan(\frac{x}{2})^2}{1 + \tan(\frac{x}{2})^2}$$
$$\sin(x) = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1 + \tan(\frac{x}{2})^2}$$
$$\tan(x) = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1 - \tan(\frac{x}{2})^2}$$

si $p, q \in \mathbb{R}$

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Exercice 1. Prouver les formules du corollaire en admettant les formules de la proposition.

0.3. **Alphabet grec.** En plus de l'alphabet latin, vous serez amenés à rencontrer, l'an prochain, dans vos cours (mathématiques, physique, chimie et sciences de l'ingénieur) des lettres grecques listées dans le tableau ci-dessous.

Nom	Minuscule	Majuscule
alpha	α	A
beta	β	B
gamma	γ	Γ
delta	δ	Δ
epsilon	ε	E
zeta	ζ	Z
eta	η	H
theta	θ	Θ
iota	ι	I
kappa	κ	K
lambda	λ	Λ
mu	μ	M
nu	ν	N
xi	ξ	Ξ
omicron	o	O
pi	π	Π
rho	ρ	P
sigma	σ	Σ
tau	τ	T
upsilon	υ	Υ
phi	φ	Φ
chi	χ	X
psi	ψ	Ψ
omega	ω	Ω

Remarque 0.5. Ne pas confondre ω avec w, ni ρ avec p !

D'autres graphies apparaissent parfois :
— ϵ pour ε,
— ϕ pour φ,
— ϑ pour θ,
— ϖ pour π,
— ς pour σ.

1. Fonctions, domaine de définition, dérivation

Exercice 2. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition de la fonction définie par l'expression considérée, déterminer le domaine de dérivabilitéde la fonction f, puis calculer f'.

(a) $f(x) = 4x^2 - 3x + 1 + \frac{3}{x}$
(b) $f(x) = (x^3 - x)(x - 9)$
(c) $f(x) = (2x + \frac{1}{x})(3x - 1)$
(d) $f(x) = \frac{2x+1}{3x-1}$
(e) $f(x) = \frac{x}{x+\sqrt{x}}$
(f) $f(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^3$
(g) $f(x) = \frac{1}{2-\cos(x)}$
(h) $f(x) = (x^4 - x^2 + 5)^4$
(i) $f(x) = (\ln(x))^3$
(j) $f(x) = (x^2 + x + 1)\mathrm{e}^x$
(k) $f(x) = \sqrt{(\ln(x))^2 + 1}$
(l) $f(x) = \ln(\mathrm{e}^{2x} - 1)$
(m) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$
(n) $f(x) = (1 - x)\sqrt{x + 1}$
(o) $f(x) = \frac{1}{x^2+x-2}$
(p) $f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$
(q) $f(x) = \frac{-3x^2+4x-1}{x^2+2x+5}$
(r) $f(x) = \ln(\frac{2x-1}{x-3})$
(s) $f(x) = \frac{4\cos^2(x)-3}{2\cos(x)}$
(t) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

2. Calcul de primitives

Exercice 3. Par reconnaissance de dérivées, déterminez une primitive des fonctions définies par les expressions suivantes :

(1) $2x^{27} + x^3 + 4x + 5$,
(2) $\sin(2t + \pi/5)$,
(3) $1 - 2\mathrm{e}^t$,
(4) $\frac{3x^2}{4x^3+1}$,
(5) $\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+x}$,
(6) $\frac{1}{\sqrt{3x+1}}$,
(7) $\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}$,
(8) $\frac{\sin(x)}{\cos(x)^4}$,
(9) $\frac{9x^2+1}{(3x^3+x+1)^3}$,
(10) $x^2\exp(x^3)$,
(11) $\dfrac{1}{x\ln^3(x)}$
(12) $\cos(5x + 3)$,
(13) $x\cos(3x^2)$,
(14) $\frac{1}{x^n}$, $(n \in \mathbb{N}^*)$
(15) $\tan(x)$,
(16) $\frac{1}{\tan(x)}$

Exercice 4. Déterminer la primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$

(1) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$,

(2) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(3x)$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $y_0 = 0$,

(3) $I = \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$,

Exercice 5. Calculer

(1) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$
(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$
(3) $\displaystyle\int_0^2 9t^2\sqrt{1+t^3}\,\mathrm{d}t$
(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$
(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2t)}{\cos(t)}\,\mathrm{d}t$
(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(t)^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 6.

Calculez dans chaque cas une primitive des fonctions définies par les formules suivantes. Vous aurez éventuellement besoin d'une intégration par parties.

a) $f(x) = \sin(5x) - 2\cos(3x) + 4\sin(2x)$

b) $f(x) = \frac{x}{(x^2-4)^2}$

c) $f(x) = \sin(x)\cos(x)^3$

d) $f(x) = x\cos(x)$

e) $f(x) = x^2\sin(x)$

f) $f(x) = x^2 \mathrm{e}^x$

g) $f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x}$

h) $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^x$,

i) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

j) $f(x) = x^2\ln(x)$

Exercice 7. Calculer : $2\displaystyle\int_1^2 \ln(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} + \ln\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)\mathrm{d}t.$

Exercice 8. Déterminer une primitive de la fonction f définie par (on ne cherchera pas à déterminer le domaine de définition) :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{\cos(x)^2}\,,\quad f(x) = \cos(\frac{x-\pi}{4})\,,\quad f(x) = \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{5\sqrt{x}}\,,\quad f(x) = \sin(x)\cos(x)^2\,,$$

$$f(x) = \left(\frac{x}{x^4+1}\right)^3\,,\quad f(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{2+\sin(x)}}\,,\quad f(x) = x\cos(x)+\sin(x)\,,\quad f(x) = x\cos(x^2)\,,$$

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^3+2)^3}\,,\quad f(x) = \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\,,\quad f(x) = \frac{1}{\sin(x)\tan(x)}\,,\quad f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$$

3. Equations, inéquations

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations ou systèmes d'inconnue x :

(a) $3x^2 - x + 10 < 0$

(b) $x^2 - (3x+5)^2 \leqslant 0$

(c) $\frac{x+1}{x-1} \leqslant x^2 + x - 1$

(d) $(x+1)^3 - x^3 - 1 = 0$

(e) $15x^2 + 14x + 3 \leqslant 0$

(f) $\frac{2x-3}{5x+4} \geqslant 0$

(g) $\left|x^2 - 8x + 1\right| = 4$

(h) $|x+1| = |2x-3|$

(i) $|2-x| < |x+1|$

4. trigonométrie

Exercice 10. Soit x, y des réels. On sait que $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ et que $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$.

On définit de plus, si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

(1) Exprimer en fonction de $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$:

$$\cos(x-y)\,,\qquad \sin(x-y)\,,\qquad \tan(x-y)\,,$$

$$\cos(x+\pi)\,,\qquad \sin(x+\pi)\,,\qquad \tan(x+\pi)\,.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\,,\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\,,\qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\,.$$

(2) Exprimer en fonction de $\cos(x \pm y)$ et $\sin(x \pm y)$:

$$\cos x \cos y\,, \qquad \sin x \sin y\,, \qquad \cos x \sin y\,.$$

Exercice 11. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

(1) $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\sin(x + \frac{\pi}{6}) = -1$

(3) $\sin(x)\cos(x) = \frac{-\sqrt{3}}{4}$

(4) $\cos(x) > \frac{1}{2}$

(5) $\sin(x) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$

(6) $\cos(2x) = 2 + \cos(3x)$

5. Nombres complexes

Exercice 12. Mettre chacun des nombre complexes suivants sous sa forme algébrique

$$i - (3+2i)\,, \quad (5+3i)^2\,, \quad \frac{1}{1-i}\,, \quad \frac{1}{2-3i}\,.$$

Exercice 13. Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

(1) $i(5-i)(i-1)$

(2) $(1+i)(1+2i)$

(3) $(5+3i)(5-3i)$

(4) $(1+i)^2$

(5) $(1+i)^4$

(6) $(1+i)^{2000}$

(7) $\frac{1}{i}$

(8) $\frac{1}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(9) $\frac{3+2i}{i}$

(10) $\frac{i-1}{i+1}$

(11) $\frac{3-5i}{2-i}$

(12) $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$

Exercice 14. Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique et calculer leur module :

$$z_1 = \frac{1}{i}\,, \qquad z_3 = \frac{1+2i}{1-3i}\,, \qquad z_4 = \frac{(2+3i)^2}{4-2i}\,, \qquad z_5 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}\,, \qquad z_6 = \frac{(5-i)^6}{(3+2i)^5}\,.$$

Exercice 15. Mettre chacun des nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

(1) $-i$

(2) -7

(3) $\frac{-3}{i}$

(4) $2-2i$

(5) $3i - 3\sqrt{3}$

(6) $(1+i\sqrt{3})^3$

(7) $\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$

(8) $\frac{2i(1-i)}{3+3i\sqrt{3}}$

(9) $\frac{2i-2\sqrt{3}}{4i+4}$

(10) $\frac{(1+i)^2}{(1-i)^3}$

(11) $\cos(\frac{\pi}{12}) - i\sin(\frac{\pi}{12})$

(12) $\sin(\frac{\pi}{12}) + i\cos(\frac{\pi}{12})$

(13) $1 - i\tan(\frac{\pi}{15})$

Exercice 16. Déterminer le conjugué des nombres complexes suivants (on ne demande pas la forme algébrique) :

$$3-11i\,,\quad 8i\,,\quad i(9+2i)\,,\quad (3+i)(-13-2i)\,,\quad (2+5i)^6\,,\quad (1+i)^3(1-2i)^4\,,$$
$$\frac{2-3i}{8+5i}\,,\quad \frac{i(1-9i)}{(3+7i)^2}\,,\quad \frac{2}{1+i}-\frac{3}{1-i}\,.$$

Exercice 17. Soit z un nombre complexe. Sans calculs, justifier que les nombres suivants sont soit réels, soit imaginaires purs :

$$A=z^2+\bar{z}^2\,,\quad B=\frac{z-\bar{z}}{z^3+\bar{z}^3}\,,\quad C=\frac{z^2-\bar{z}^2}{z\bar{z}+2}\,.$$

Exercice 18. Calculer le module des nombres complexes suivants :

$$-5\,,\quad \frac{2i}{3}\,,\quad -7i\,,\quad 1+i\,,\quad i-1\,,\quad \sqrt{3}+i\,,\quad 1+i\sqrt{3}\,,\quad \sqrt{3}+i\sqrt{2}$$
$$(4+3i)(12-5i)\,,\quad (2-7i)^3\,,\quad \frac{7}{(2-i)^2}\,,\quad \frac{3+i}{4+i}\,,\quad \frac{5+9i}{5-9i}$$

Exercice 19. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

(1) $iz+2-i=0$

(2) $(3+5i)z=1-z$

(3) $\dfrac{z+1}{z-1}=2i$

(4) $(7-i)\bar{z}+3=0$

(5) $\begin{cases} z-z'=i \\ iz+z'=1 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} 2z+z'=1-i \\ z-iz'=0\,. \end{cases}$

(7) $|z|=|z^2|$.

Exercice 20.

(1) Placer dans le plan complexe les points A,B,C,D d'affixes respectives $a=-1$, $b=3$, $c=1+2i\sqrt{3}$ et $d=7$.

(2) Étudier la nature des triangles ABC et ACD.

Exercice 21. Pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{-1\}$, on pose $\alpha=\frac{z-1-i}{z+1}$.

(1) Déterminer l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que α soit réel. Représenter cet ensemble dans le plan complexe.

(2) Déterminer l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que α soit imaginaire pur. Représenter cet ensemble dans le plan complexe.

(3) Déterminer l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que $|\alpha|=1$. Représenter cet ensemble dans le plan complexe.

Exercice 22. Le nombre $3+2i$ est l'une des racines de l'équation $2z^2+rz+s=0$ où r et s sont réels. Déterminer r et s.

6. Un peu de géométrie

Exercice 23.

(a) On donne dans le plan les points $K(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}), L(\frac{5}{2},\frac{2}{3})$. Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{LK}$? du milieu du segment $[KL]$? Quelle est la longueur KL ?

(b) Déterminer une équation cartésienne de la droite du plan passant par le point $A(-1,2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(\frac{2}{3},-1)$.

(c) Déterminer une équation cartésienne de la droite du plan passant par les points $A(-1,2)$ et $B(3,1)$

(d) Dans le plan rapportéà un repère orthonormé, les droites d'équations respectives $2y+x+3=0$ et $3y+ax+2=0$ se rencontrent en formant un angle droit. Quelle est la valeur de a ?

(e) Déterminez une équation du cercle de centre $A(\frac{3}{4},-\frac{5}{6})$ et de rayon $r=\frac{1}{2}$

(f) Déterminez le centre et le rayon du cercle d'équation $3x^2+3y^2-6x+36y-8=0$.

(g) Déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point $A(-1,0,2)$ et dirigé-par les vecteurs $\vec{u}(1,-1,0)$ et $\vec{v}(-1,2,1)$.

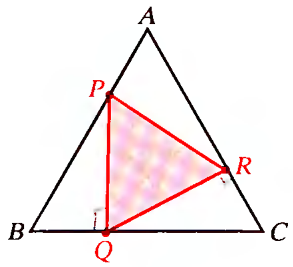
Exercice 24. Déterminer une équation de la tangente en $A(3,2)$ au cercle de centre $\Omega(-1,3)$ et passant par A.

Exercice 25. On considère un carré $ABCD$ direct. On appelle I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AD]$. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{CJ}$.

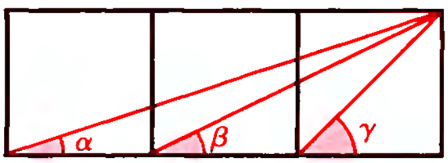
Exercice 26. Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle équilatéral de côtéa. On place les points P,Q,R tels que $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BQ}=x\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CR}=x\overrightarrow{CA}$ où $x\in]0,1[$.

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AR}$, puis PR^2 en fonction de a et x.

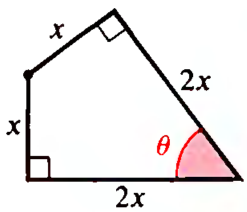
Quelle est la nature du triangle PQR ?



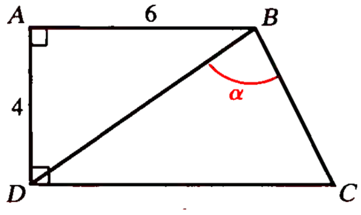
Exercice 27. La figure ci-dessous représente trois carrés identiques juxtaposés. Quelle relation y a-t-il entre les angles α,β et γ ?



Exercice 28. Quelle est la valeur de $\sin(\theta)$?



Exercice 29. *L*a figure ci-dessous représente un trapèze rectangle $ABCD$. Exprimer la longueur DC en fonction de l'angle α.



Exercice 30. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = 2x+1$ et $\mathscr{D}'$ la droite d'équation $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$. Le projeté d'un point $M(x, y)$ sur la droite $\mathscr{D}'$ parallèlement à la droite $\mathscr{D}$ est le point d'intersection $M'(x', y')$ de la droite parallèle à $\mathscr{D}$ et passant par M avec la droite $\mathscr{D}'$ (faire un dessin).
Exprimer x', y' en fonction de x et y.

7. Petit problème

Exercice 31.

On pose $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et, on définit sur I deux fonctions f et g en posant pour tout $x \in I$:

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(2\sin(x) + \tan(x)\right) \text{ et } g(x) = \frac{3\sin(x)}{2 + \cos(x)}.$$

On définit aussi deux fonctions u et v en posant, pour tout $x \in I$,

$$u(x) = f(x) - x\,, \qquad \text{et} \qquad v(x) = g(x) - x\,.$$

(1)

(a) Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$2x^3 - 3x^2 + 1 = (x-1)(ax^2 + bx + c).$$

(b) Justifier la dérivabilité de u et v puis déterminer des polynômes P et Q tels que pour tout $x \in I$: $\quad u'(x) = \dfrac{P(\cos(x))}{3\cos(x)^2}$ et $v'(x) = \dfrac{Q(\cos(x))}{(2+\cos(x))^2}$.

(c) Etablir, pour tout $x \in I$, l'encadrement : $g(x) < x < f(x)$.

(2)

(a) Justifier à l'aide d'un taux d'accroissement la limite : $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

(b) Etablir, pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, l'inégalité $\sin(x) \leqslant x$.

(3)

(a) En calculant $e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{-\frac{i\pi}{4}}$ de deux manières différentes, déterminer les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

(b) En évaluant l'encadrement de la question (1.c) en $\dfrac{\pi}{12}$, déterminer un encadrement de π.

(4) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$ et $b_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$.

(a) Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1-b_n}{2}}$ et $b_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+b_n}{2}}$.

(b) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement : $\quad 9 \times 2^n \times \dfrac{a_n}{2+b_n} < \pi < 2^n\left(2a_n + \dfrac{a_n}{b_n}\right)$.

(c) Justifier les limites : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty}\left(9 \times 2^n \times \frac{a_n}{2+b_n}\right) = \pi$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 2^n\left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right) = \pi$.

(d) On note $\Delta_n = 2^n\left(2a_n + \dfrac{a_n}{b_n}\right) - 9 \times 2^n \dfrac{a_n}{2+b_n}$. Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité : $\Delta_n \leqslant \dfrac{4^5}{3^5 \times 2^{4n+2}}$. (On pourra majorer π par 4.)

(e) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, $0 \leqslant \Delta_n \leqslant 10^{-k}$.

(f) En déduire une procédure permettant de calculer les k premières décimales de π.