1 Calculs

Exercice 1

$$A = \frac{17}{27} \quad B = \frac{37}{36} \quad C = -\frac{47}{36} \quad D = \frac{6}{35}$$

$$E = \frac{2}{3} \quad F = \frac{1}{7} \quad G = \frac{31}{15} \quad H = \frac{5}{2}$$

$$I = -\frac{1}{3} \quad J = -\frac{5}{3} \quad K = \frac{11}{18} \quad L = \frac{17}{12}$$

$$M = -1 \quad N = \frac{22}{21} \quad O = -\frac{1}{4} \quad P = \frac{4}{5}$$

$$Q = \frac{4}{3} \quad R = -\frac{11}{18} \quad S = -9 \quad T = \frac{3}{5}$$

Exercice 2

$$A = \frac{-13x^2+22x-3}{4-3x} \quad B = \frac{-8x^2+24x-14}{2x-5} \quad C = \frac{3x^2+8x-3}{(2x+1)(x-2)} \quad D = \frac{-3x^2-16x+15}{(x+2)(3x-1)}$$

$$E = \frac{5x^2+17x+19}{(x+2)^2} \quad F = \frac{12x^2-10x-5}{(2x-1)^2} \quad G = \frac{2}{(x-1)(x+1)} \quad H = \frac{1}{x^2-1}$$

Exercice 3

$$A = \frac{1}{5} \quad B = \frac{11}{9} \quad C = \frac{25}{32} \quad D = a(a+b)^2$$

$$E = \frac{1}{3}n + \frac{1}{3} \quad F = \frac{3}{2}n(n+1) \quad G = \sqrt{ab} \quad H = \frac{4a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}$$

$$I = 2^{n+1} \quad J = 2^{2^{2n}} \quad K = 2^n \quad L = 2^{2^{n+1}}$$

$$M = \frac{3^9}{2^6 \times 5^{20}} \quad N = \frac{3^{15} \times 5^3}{2^9} \quad O = \frac{10^6}{3^{12}} \quad P = -\frac{2^{24}}{5^6 \times 3^{12}}$$

$$Q = \frac{a^4}{c^3} + \frac{a^3}{bc^2} \quad R = \frac{b^{17}}{a^9 c^5} \quad S = \frac{1}{2} \quad T = \ln\left(\frac{a}{1-a}\right)$$

$$U = 1 \quad V = \frac{1}{1-\mathrm{e}^a} \quad W = 1 \quad X = \frac{ax}{b+x}$$

2 Trinômes

Exercice 4

a)

$A = 24x^2 + 38x + 15$ $B = -6x^2 + 29x - 28$ $C = -12x^2 + 17x + 45$

$D = 6x^2 + 8x - 62$ $E = 12x^2 + 17x - 7$ $F = 35x^2 - 20x - 2$

$G = 5x^2 + 9$ $H = -46x^2 + 5x + 67$ $I = 11x - 16$

b)

$A = x^2 + 14x + 49$ $B = y^2 - 18y + 81$ $C = 9x^2 + 30x + 25$

$D = 4x^2 - 12x + 9$ $E = x^2 - 64$ $F = 16x^2 - 25$

$G = 4x^2 - 8x + 17$ $H = -11x^2 + 32x + 9$ $I = -8x^2 + 42x - 65$

$J = -31x^2 + 3x + 39$ $K = 7x^2 + 52x + 14$ $L = 22x^2 - 3x - 6$

Exercice 5

$A) x = 3 + \sqrt{6}$ ou $x = 3 - \sqrt{6}$ $B)$ pas de solution $C) x = -\frac{2}{5}$

$D) x = 5$ $E) x = \frac{3}{2}$ ou $x = \frac{5}{3}$ $F)$ pas de solution

$G) x = 0$ ou $x = \frac{11}{3}$ $H) x = -1 - \sqrt{3}$ ou $x = -1 + \sqrt{3}$ $I) x = 0$ ou $x = 2$

Exercice 6

$A) [1, 4]$ $B) \left]-\infty, \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{21}}{2}, +\infty\right[$ $C)$ pas de solution

$D) \mathbb{R}$ $E) \mathbb{R} \setminus \{\frac{4}{3}\}$ $F) \left\{-\frac{2}{5}\right\}$

$G) \left]-1-\sqrt{2}, 0\right[\cup \left]-1+\sqrt{2}, +\infty\right[$ $H)]-\infty, -1[$ $I)]-\infty, -1] \cup \left[0, \frac{5}{3}\right]$

Exercice 7

a)

$$A = (x-1)(x-4) \quad B = 6\left(x-\frac{5}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right) \quad C = 2\left(x-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$D = (x-1)^2 \quad E = (x+1)^2 \quad F = (x-1)(x+1)$$

$$G = (x+3)^2 \quad H = (x-7)^2 \quad I = (x-5)(x+5)$$

$$J = (3x-5)^2 \quad K = (4x+3)^2 \quad L = (2x-5)(2x+5)$$

b)

$$A = (x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7}) \quad B = (\sqrt{3a}+b)^2 \quad C = (a-4xy)(a+4xy)$$

$$D = (a+x)(a+y) \quad E = (a+x)(b+y) \quad F = (2a+3b)^2$$

$$G = (x+y+2)^2 \quad H = (3-(a-b)^2)^2 \quad I = (a+b+c)^2$$

$$J = (a+b+c)^2 \quad K = (1-x^2)^2 \quad L = (x-m)(mx-1)$$

3 Inégalités

Exercice 8

a) $A \leqslant B$

b) $A \leqslant B$

c) $A \leqslant B$ si $x \in [-1, 1]$, $A \geqslant B$ sinon

d) $A \geqslant B$ si $x \in [1, \mathrm{e}]$, $A \leqslant B$ sinon (avec toujours $x > 0$)

e) $A \leqslant B$ si $x \in [-\infty, -3] \cup] -\frac{2}{3}, 0[$, $A \geqslant B$ sinon

f) $A \leqslant B$ si $x \in] -\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}]$, $A \geqslant B$ sinon (avec toujours $x > 0$ et $x \neq \frac{1}{\mathrm{e}}$)

4 Étude de fonctions

Exercice 9

a) $f : x \mapsto x^3$ est définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

Le tableau de signe est immédiat :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 \text{ et } f''(x) = 6x.$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

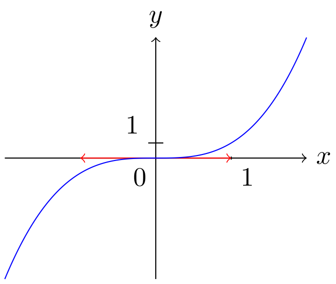
f est concave sur $\mathbb{R}_-$, convexe sur $\mathbb{R}^+$.

b) $f : x \mapsto (x+1)^2$ est définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.
Elle est évidemment positive (carré), et s'annule en 0.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x + 2 \text{ et } f''(x) = 2 > 0.$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f''(x)$			$+$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

f est convexe sur $\mathbb{R}$.

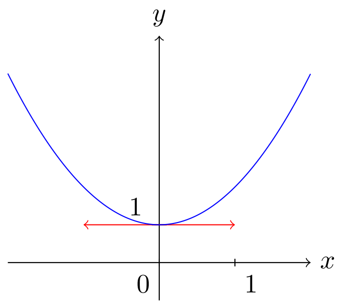


c) $f : x \mapsto x^2+1$ est définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme. Elle est évidemment strictement positive (carré plus 1).

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x \text{ et } f''(x) = 2 > 0.$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$			$+$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

f est convexe sur $\mathbb{R}$.



d) $f : x \mapsto \frac{3x+4}{5x-2}$ est définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{5}\}$ comme fonction quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas.

On a le tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$3x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$5x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

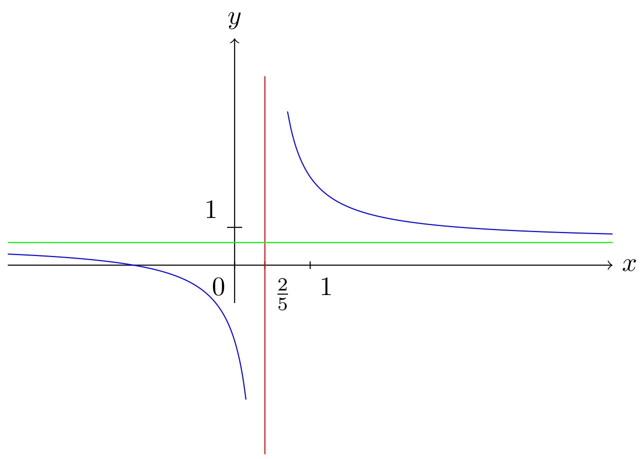
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{5}\}, f'(x) = -\frac{26}{(5x-2)^2} \text{ et } f''(x) = \frac{260}{(5x-2)^3}$$

x	$-\infty$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	‖	$+$	
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$\frac{3}{5}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{3}{5}$

Les limites en l'infini s'obtiennent au moyen de la forme :

$$f(x) = \frac{3}{5}\left(\frac{1+\frac{4}{3x}}{1-\frac{2}{5x}}\right).$$

f est concave sur $]-\infty, \frac{2}{5}[$, convexe sur $]\frac{2}{5}, +\infty[$.



e) $f : x \mapsto \ln(x) - 1$ est définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables.
On a bien sur, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\iff \ln(x) > 1 \\ &\iff x > \mathrm{e}. \end{aligned}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{1}{x} \text{ et } f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f''(x)$	‖ $-$
$f'(x)$	‖ $+$
$f(x)$	‖ $-\infty \nearrow +\infty$

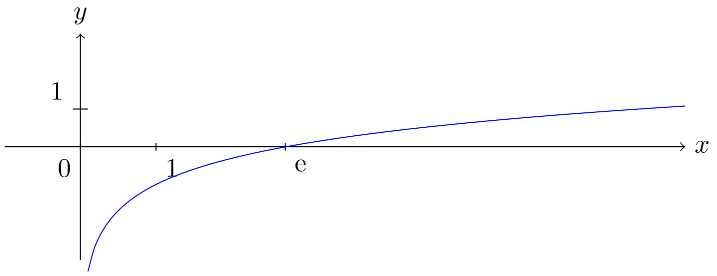
f est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

f) $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}$ est définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables. Elle est immédiatement strictement positive.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x} \text{ et } f''(x) = 4\mathrm{e}^{-2x} > 0$$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f''(x)$	$+$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$

f est convexe sur $\mathbb{R}$.



g) $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}$ est définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables.
On a bien sur, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

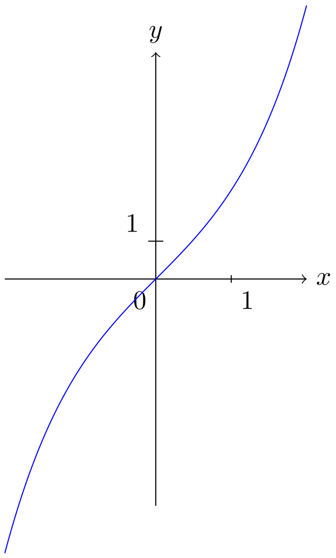
$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\iff \mathrm{e}^{x} > \mathrm{e}^{-x} \\ &\iff x > -x \\ &\iff x > 0. \end{aligned}$$

De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} \text{ et } f''(x) = \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$+$	
$f'(x)$			$+$		
$f(x)$	$-\infty$	↗			$+\infty$

f est concave sur $\mathbb{R}_-$, convexe sur $\mathbb{R}_+$.

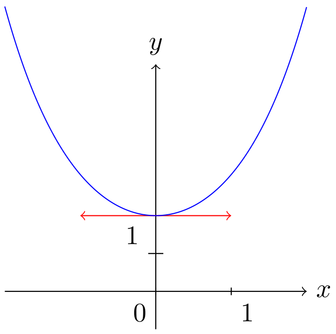


h) $f : x \mapsto \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$ est définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables. Elle est évidemment strictement positive (somme d'exponentielles).

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \text{ et } f''(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} > 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$			$+$		
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

f est convexe sur $\mathbb{R}$.



i) $f : x \mapsto \frac{1}{e^x - 1}$ est définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas ($e^x - 1 \neq 0 \iff x \neq 0$).
On a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

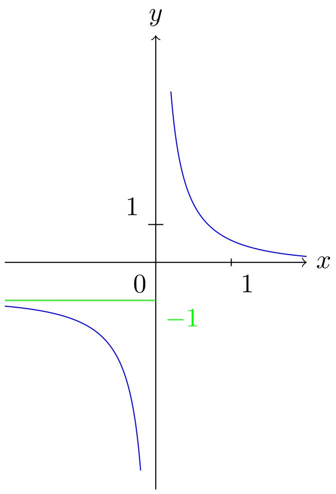
$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\iff e^x - 1 > 0 \\ &\iff x > 0 \end{aligned}$$

Donc $f(x)$ est du signe de x.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{e^x}{(e^x-1)^2} \text{ et } f''(x) = \frac{e^x(1+e^x)}{(e^x-1)^3}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	‖	$+$	
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

f est concave sur $\mathbb{R}_-^*$, convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.



j) $f : x \mapsto x\ln(x)$ est définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables. On a le tableau de signe

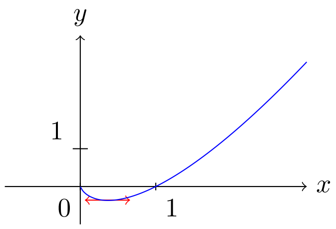
x	0		1		$+\infty$
x		$+$		$+$	
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \ln(x) + 1 \text{ et } f''(x) = \frac{1}{x} > 0$$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f''(x)$	‖		$+$		
$f'(x)$	‖	$-$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$

(la limite en 0 est une croisssance comparée)

f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

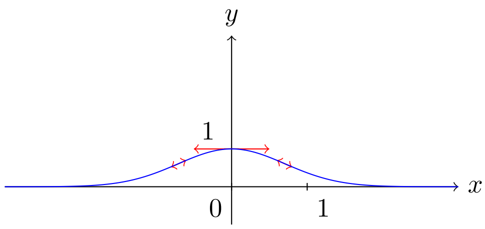


k) $f : x \mapsto e^{-x^2}$ est définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables, et est strictement positive (exponentielle).

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2xe^{-x^2} \text{ et } f''(x) = (4x^2-2)e^{-x^2}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$f'(x)$			$-$		0		$+$		
$f(x)$	0		↗		0		↘		0

f est convexe sur $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$, concave sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.



l) $f : x \mapsto \ln(1-x^2)$ est définie et dérivable deux fois sur $]-1,1[$ comme composée de fonctions dérivables. En effet, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) \text{ existe } &\iff 1-x^2 > 0 \\ &\iff x^2 < 1 \\ &\iff -1 < x < 1. \end{aligned}$$

Comme pour tout $x \in]-1,1[$, $1-x^2 \leqslant 1$, on a $f(x) \leqslant 0$ (et f ne s'annule qu'en 0).

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{2x}{1-x^2} \text{ et } f''(x) = -2\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} < 0$$

x	-1		0		1
$f''(x)$	$\|\|$	$+$		$+$	$\|\|$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

f est concave.